Mathematische (Basis-)Kompetenzen im Abitur

(Un-)Verzichtbare Mathematik für „Allgemeinbildung“ und Hochschulzugang

Alexander Wynands

Dieser Beitrag diskutiert einige Aspekte der Mathematik-Standards zum Abitur, veröffentlicht im Herbst 2012 durch die Kultusministerkonferenz [KMK 2012] nach der Vorarbeit einer Projektgruppe im IQB Berlin, in der ich mitarbeiten konnte. Die von der KMK veröffentlichten Standards nennen Kompetenzen und Leitideen für die „Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik“ auf einem „grundlegenden Anforderungsniveau“ und auf einem „erhöhten Anforderungsniveau“ (für eine uneingeschränkte *allgemeine Studierfähigkeit*?).

Unter Beachtung des Strukturwandels in den letzten 50 Jahren im Gymnasium bzw. der Sekundarstufe II in Deutschland werden Vorüberlegungen zu unverzichtbaren „Basiskompetenzen“ (für eine *Abitur-Allgemeinbildung)* am Ende der Sek. II skizziert.

1 Abitur-Standards – Soll-Vorstellungen oder „Mainstream“?

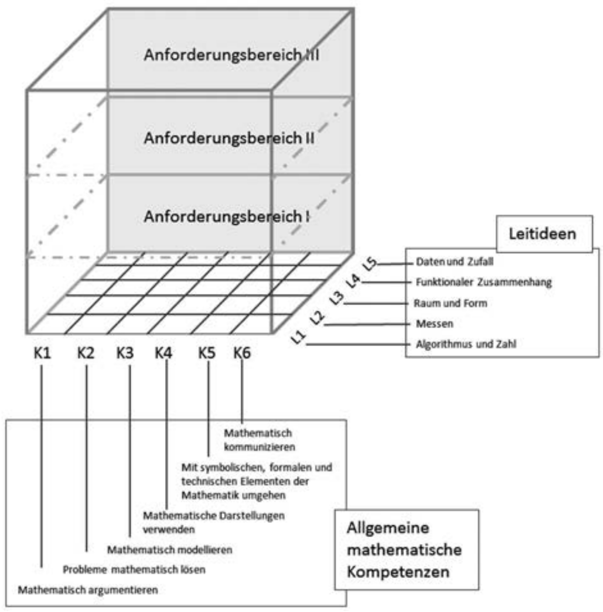
In der Fachpräambel der KMK-Veröffentlichung[1] werden die „allgemeine[n] Ziele des Faches und fachdidaktische[n] Grundlagen“ so benannt:

> Das Fach Mathematik leistet einen grundlegenden Beitrag zu den Bildungszielen der gymnasialen Oberstufe und der Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler bis zur Allgemeinen Hochschulreife. Vermittelt werden eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung.

Meine Bedenken, ob diese „allgemeinen Ziele“ im derzeitigen Bildungssystem mit den veröffentlichten „Standards“ erreicht werden können, möchte ich als Statements und mit Fragen formulieren.

1. Die vom IQB-Team erstellten und in [KMK 2012] formulierten Standards sollen für jeden Abitur-Zugang gelten. Werden hierdurch bisher geltende Richtlinien/(Kern-)Curricula von Gesamtschulen und (Berufs-)Kollegs nachgebessert oder erfolgt eine Neu-Nivellierung aller Schulen der Sek. II in Deutschland?
2. Die auf zwei Niveaus („grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau“) formulierten Standards fordern für viele Abiturienten, die z. B. gar nicht oder keine MINT-Fächer studieren, ein sehr umfangreiches Leitideen-Spektrum mit zu viel Detailwissen. Werden hierdurch breites, anwendungsorientiertes Fakten-Wissen und „Können“ auf Kosten von Begriffs-Wissen, Beweisen und Methoden-Reflexionen angestrebt?
3. Es wird nicht klar, was Standards für eine „vertiefte Allgemeinbildung“ auf Sek. II-/Abitur-Standards sein sollen und welche Standards hinreichend erscheinen für die Studierfähigkeit von MINT-Studien. Welche „Basiskompetenzen“ sollten für die Sekundarstufe II unverzichtbar sein und welche Kompetenzen sind eine aussichtsreiche Basis zum Studium besonders der MINT-Fächer?
4. „Standards“ unterliegen einem gesellschaftlichen, bildungspolitischen „Mainstream“ oder „Zeitgeist“. Solange keine empirischen Befunde über ihre Inhalte und Erreichbarkeit in allen (!) Bundesländern angestrebt bzw. politisch gewollt sind, ist die Meinung einer einzelnen Expertengruppe (IQB-Team) für eine Festschreibung hilfreich aber nicht hinreichend. Wodurch können die teilweise verheerend hohen Studien-Abbrecher-Zahlen verkleinert werden?
5. Eine mathematik-didaktische Theorieorientierung ist für Standards notwendig. Die „Verortung“ in einem „3-D-System (Kompetenzen × Leitideen × Anforderungsbereiche“, die in [KMK 2012] genannt wird, ist sehr hilfreich für die Curriculum-Entwicklung, die Arbeitsprozesse im Mathematikunterricht ebenso wie zur Konstruktion von Aufgaben für Test, Klassen- und Abiturarbeiten (s. Abbildung). Aber:
   - Die in [KMK 2012] veröffentlichten Beispiel-Aufgaben weisen nicht deutlich genug darauf hin, dass „gute“ Aufgaben nicht einen isolierten „Punkt“ im 3-D-System konkretisieren sondern eher umfassendere „Intervalle“ bzw. „Bereiche/Flächen/Räume“ exemplifizieren sollten.
   - Viel deutlicher müssten viel mehr exemplifizierende Aufgaben im Anforderungsbereich I hinweisen auf unverzichtbare „Ba-

[1] Quelle: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf



3-D-System: Kompetenz × Leitidee × Anforderungsbereich

siskompetenzen" für eine *Abitur-Allgemeinbildung* am Ende der Sek. II.

6. Wichtig wäre eine „Abnehmer-Befragung", die zumindest teilweise klären sollte, ob die Standards und Aufgaben-Beispiele verständlich formuliert und zustimmungsfähig (im Hochschul- und Berufsbildungs-Bereich) sind.

Ich möchte meine Meinung klar formulieren: Ohne die in Punkt 1 angesprochene „System-Frage" zu stellen für unsere Gymnasien, Gesamtschulen, (Berufs-)Kollegs und für Studiengänge in (binären) Ausbildungen, an (Fach-)Hochschulen und Universitäten, erscheint mir eine zielorientierte, effektive Aussage über Abitur- bzw. Sek. II-Standards nahezu ziellos. Während meiner Mitarbeit im IQB-Team konnte (oder wollte) man nicht diese Systemfrage beantworten: Für welches Abitur sollen in Deutschland welche Mathematik-Standards gelten? Oder kurz: Was ist im Abitur (un-)verzichtbar?

Alle für die (Aus-) Bildung Verantwortlichen – nicht nur die Kolleginnen und Kollegen der Mathematikdidaktik – sind m. E. aufgefordert mit zu streiten, dass

- einerseits keine zu „breiten" Anforderungen für eine „Abitur-Allgemeinbildung" gestellt werden und
- andererseits tragfähige Standards für eine „allgemeine Studierfähigkeit" sowie für „wissenschaftspropädeutische Bildung" den Mathematikunterricht in der Sek. III prägen.

Es wird höchste Zeit, dass sich nicht nur Fachdidaktiker, sondern auch besonders die für Erziehung und (Aus-)Bildung Verpflichteten (Eltern, Lehrende, Politiker, ...) zielorientiert streiten über Kompetenzen, ohne die eine „allgemeine" oder „berufsfeld-spezifische" Hochschulreife nicht bescheinigt werden sollte. Es muss diskutiert werden, welchen Wert und welches Ziel ein Abitur haben sollte. Welche Standards aus dem Bundesland X oder aus Y sollen hier Pate stehen? Man beachte dazu die Anteile von Schulabgängern mit Hochschulreife im Jahr 2009[2] z. B.: Saarland 52 %, Berlin 37 %, NRW 35 %, Bayern 25 %, Sachsen Anhalt 24 %.

Die Frage nach einer sinnvollen, vertretbaren oder gewünschten Quote von Studienberechtigungen kann sicherlich nicht beantwortet werden von Interessen-Vertretern aus Industrie, Handel oder Hochschule, die ihren eigenen Bedarf artikulieren. Eltern, die „auf jeden Fall" ihr Kind zum Abitur und Studium bringen wollen, sollten pädagogisch begleitet und informiert werden über bessere Alternativen.

> 48,4 Prozent der 18- bis 20-Jährigen, haben 2010 das Abi oder Fachabi bestanden – ein Rekord seit der Wiedervereinigung, wie das Statistische Bundesamt in Wiesbaden berichtet. Diese sogenannte Studienberechtigtenquote hatte im Vorjahr noch bei 45,9 Prozent gelegen und 1992 – im Jahr der ersten Erhebung nach der Wiedervereinigung – nur bei 30,8 Prozent. [...] In den westlichen Bundesländern [außer im Saarland] gab es überall Zuwächse bei den für ein Studium zugelassenen Absolventen, am stärksten in Schleswig-Holstein mit 9,4 Prozent.[3]

Weder ökonomisch sinnvoll noch menschlich vertretbar erscheinen mir zu hohe Studien-Abbrecher-Quoten in Deutschland:

> 115 800 Studienanfänger begannen 2011 ein ingenieurwissenschaftliches Studium [...] Jeder zweite [...] bricht es nach ein paar Semestern wieder ab. [...] Die häufigsten Gründe [...] sind Schwierigkeiten mit den Studienanforderungen und fehlende Motivation, ermittelte das HIS (Hochschul-Informations-System)[4]

Am wahrscheinlichsten wird ein Studienabbruch nach den in Fußnote 3 zitierten Untersuchungen des HIS für einen

[2] http://de.statista.com/statistik/daten/studie/183267/umfrage/anteil-der-abiturienten-nach-bundeslaendern/
[3] http://www.spiegel.de/schulspiegel/wissen/abi-boom-jeder-zweite-schueler-schafft-die-hochschulreife-a-748622.html
[4] F. Lübe in Die ZEIT, Nr. 10, 28. 2. 2013, S. 75

> Fachhochschüler ohne Mathematik- und Physik-Leistungskurs, wenn er erst eine Ausbildung gemacht hat, dann gearbeitet hat und im Studium zuerst nur abstrakte Grundvorlesungen besuchen muss [...][5]

Es muss weiter spezifiziert werden, welche Kompetenzen angemessen sind für eine vertiefte Allgemeinbildung und für „allgemeine“ Studierfähigkeit von Nicht-MINT-Fächern. Die genannten Standards auf einem „grundlegenden Anforderungsniveau“ erscheinen mir dafür zum Teil jedenfalls in der Breite unangemessen angesetzt.

2 Anmerkungen zu „alten“ und „neuen“ Abitur-Klausuren

„Früher war alles besser, da war ein ABI noch ein ABITUR“

Ein Wandel von Zielsetzungen durch Reflexion alter Inhalte und Berücksichtigung neuer Erkenntnisse, Methoden, Werkzeuge und Bedürfnisse in Kultur und Gesellschaft erscheint mir weder per se schlecht noch derzeit unverzichtbar.

Zwei Original-Klausuren von 1937 und 1938 entnommen aus [Wynands 1995] mögen die häufig gehörte „All-Aussage“ widerlegen:

Herbstreifeprüfung 1937:

1. Aufgabe: Durch den Verkauf einer modernen Kraftmaschine im Wert von 35000 RM erzielt eine Fabrik jährlich 5000 RM Ersparnis. Hat sich der Einkauf gelohnt, wenn die Maschine nach 10 Jahren abgenutzt ist?
2. *Aufgabe:* Welche Höhe und lichte Weite muß man einem Litermaß geben, damit möglichst wenig Material gebraucht wird?
3. *Aufgabe:* $x^5 + 5x - 10 = 0$ hat eine reelle Wurzel. (Als Aufsatzthema.)

Reifeprüfung Ostern 1938:

1. Ein Waldbestand wird mit 90000 m^2 geschätzt. Am Ende jeden Jahres werden 3000 m^2 geschlagen. Wie groß ist der Bestand nach 20 Jahren, wenn mit einer jährlichen Vermehrung von 3 % gerechnet wird?
2. Löse die Gleichung! $x^3 = 5 + 12i$
3. Ein quadratisches Stück Papier von der Kantenlänge 24 cm soll zu einem rechteckigen Kasten verarbeitet werden. Wie groß müssen die an den Ecken ausgeschnittenen Quadrate sein, damit der Inhalt des Kastens möglichst groß wird?

Man beachte:

- Beide 1. Aufgaben sind heute für eine 10er-(Unter-Sekunda-)Klassenarbeit angemessen.
- Die beiden „Mini-Max-Aufgaben“ (2-1937 und 3-1938) sind „Klassiker“ der Schul-Analysis für quadratische Funktionen.
- Die beiden restlichen Aufgaben verwundern heute sicherlich manchen Leser; „Aufsatzthemen“ bzw. „Gleichungen mit komplexen Zahlen“ im Mathe-Abi!?

In der Abiturklausur, die 1963 der Autor dieser Zeilen an einem „humanistischen altsprachlichen Gymnasium“ zu bearbeiten hatte, findet man auch keine Analytische Geometrie/Lineare Algebra und keine Stochastik, nur Aufgaben zur Analysis/Algebra.

Nachdenken sollte man bei diesen Aufgaben sowohl über ihre sprachliche Formulierung (Sprach-Komplexität, keine Zeichnung oder Illustration) und darüber, welche der hier geforderten algebraischen Kompetenzen damals ohne und heute trotz bzw. mit Computer-Algebra-Systemen (CAS) gefordert wurden bzw. (un-)verzichtbar sind.

> *Aufgabe 1*
> Von einem rechteckigen Grundstück an der Ecke zweier, senkrecht zueinander verlaufender Straßen wird beim Ausbau der Kreuzung ein Stück abgeschnitten, so dass sich als Begrenzungslinie ein Viertelkreis ergibt, dessen Halbmesser gleich der kürzeren Rechteckseite ist.
> Wie groß wird im Höchstfall die rechteckige Bodenfläche einer auf dem Grundstück zu errichtenden Wartehalle, wenn eine Bebauung bis zur Grenze zulässig ist?
> Die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks waren 18 m und 4 m.
>
> *Aufgabe 2*
> Durch jeden Punkt einer gegebenen Parabel werde die Parallele zur Parabelachse gezogen. Durch den Schnittpunkt mit der Scheiteltangente werde die Gerade senkrecht zu der Sehne bestimmt, die den Punkt mit dem Scheitel verbindet. Senkrechte und Sehne schneiden sich in einem Punkt.
> Auf welcher Kurve liegen diese Punkte?
>
> *Aufgabe 3*
> Die Schar der Funktionen $y = \dfrac{(x^3 + 2kx)}{(x^2 - k)}$ (k reell) und ihrer Schaubilder.

[5] In 2008 verlassen die Hochschule 33 % ohne (ersten) Abschluss, vgl. http://de.statista.com/statistik/daten/studie/162988/umfrage/studienabbruch-im-laendervergleich/. In 2010 ist die Prozentzahl der Studienabbrecher: Durchschnitt in Ing. Wiss. 73 % und in MathNat 64 %; vgl. http://de.statista.com/statistik/daten/studie/157345/umfrage/erfolgsquote-von-studenten-nach-faechergruppen/.

Eine Untersuchung der Kurven auf gemeinsame und abweichende Eigenschaften in Abhängigkeit von der Wahl des Parameters k.

Anmerkungen
- Die Aufgaben beziehen sich ausschließlich auf die Schul-ANALYSIS.
  Nicht in der „Breite" wohl aber in der „Tiefe" liegen hier die Anforderungen.
- Die Anforderungen an „inner- und außermathematischer" Modellierungsfähigkeit sind beachtenswert hoch. Die Aufgaben 2 und 3 sind „offen" und „innermathematisch". Wie die Problemstellung untersucht, mathematisiert wird und die Ergebnisse begründet (bewiesen), verbalisiert, kommuniziert werden ist durch nichts vorgegeben.
- Auf so viel Bruchrechnung bzw. Termumformung wie in Aufgabe 3 gefordert möchte ich auch heute noch nicht im Mathematik-Abitur verzichten.

Zu A1 – Optimierung
Gefordert werden in dieser Aufgabe
- Text- und Sachverständnis für eine Modellierungs-Aufgabe,
- die Mathematisierung der Sachsituation in einem geeigneten Koordinatensystem und
- die Lösung des sich ergebenden innermathematischen Optimierungs-Problems mit
- anschließender Interpretation der Lösung.

Die Aufgabenstellung ist sprachlich komplex und „offen". Es gibt keinerlei Vorgaben durch eine Zeichnung, ein Koordinatensystem und für eine Methode. Die Darstellung der Sachsituation in einem (geeigneten!) Koordinatensystem ist sehr entscheidend für die konkrete „Rechnung" — damals natürlich ohne Taschenrechner!

Zu A2 — Ortskurve
Anforderungen:
- innermathematische (Um-)Modellierung (Wechsel zwischen Geometrie und Algebra)/ Problemlösung,
- Begriffe: Parabel(-Achse), (Scheitel-)Tangente, Senkrechte, Sehne, Kurven-Gleichung, [...],
- „offenes" Problem, Koordinatensystem und Kurvendarstellung sind nicht vorgegeben,
- es wird eine theoriebasierte Entdeckung mit anschließendem Beweis verlangt.

„Kopf, Stift und Lineal" sind die alleinigen „Arbeitsgeräte"; wie schön wäre doch eine „DynaGeo-Software" mindestens für eine Vermutung gewesen!

A3 — „Offene" Kurvenschar-Diskussion
Anforderungen:
- Diskussion (in Aufsatzform) für ein formales innermathematisches Thema,
- Beschreibung der Untersuchungsmethoden,
- Fallunterscheidungen/Klassifikation von Parametern,
- Term-Umformung und Interpretation von Grenzverhalten,
- lokale Stetigkeit und asymptotisches Verhalten von Kurven.

Man kommt schon ins Grübeln beim Vergleich solcher Aufgaben aus dem Jahr 1963 an einem altsprachlichen Gymnasium mit den kleinschrittig gegliederten, viele Seiten langen Aufgabenstellungen heutiger Abitur-Klausuren, vgl. [FINALE 2012].

Was soll und woher kommt diese Kleinschrittigkeit? Entspricht sie dem Verlangen nach besserer Punkte-Verteilung von Teilleistungen oder einer vom Lehrenden vor-gedachten Lösungsstrategie? Welchen Stellenwert sollten Aufgaben/ Probleme haben, die für verschiedene Lösungswege „offen" sind? Wie viel Textgestaltung, Verbalisierung von Lösungsmethoden und Begründungen, Erklärungen und Beweisen mit mathematischen Begriffen können oder wollen wir im Abitur verlangen?

3 Vorüberlegungen zu unverzichtbaren „Basiskompetenzen" am Ende der Sek. II

Dringend erforderlich erscheint mir das Nachdenken über Basiskompetenzen Mathematik für eine „Abitur-Allgemeinbildung" und Studierfähigkeit.

Fortgeschrieben werden sollte der Katalog von Basiskompetenzen „Mathematik für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht" [Drüke-Noe et al. 2011], in dem keine „Risikogruppe" beklagt noch angeklagt wird sondern vielmehr konkret Kompetenzen genannt werden, die Risiken (für „Ausbildungs-Fähigkeit" und im „Alltag") verhindern können. Eine „Abnehmerbefragung" (an Universitäten, Fachhochschulen, bei Industrie- und Handwerks-Organisationen, [...]) analog zu [Drüke-Noe et al. 2011] ist sicherlich schwierig aber einen Versuch wert.

An dieser Stelle will und kann ich nur skizzenhaft auf die Frage eingehen: „Was ist unverzichtbarer im Mathematikunterricht der Sek. II bzw. im Mathematik-Abitur?"
Basiskompetenzen sollten
- kultur-historische Aspekte berücksichtigen,
- keineswegs „formale" Bildung zu Gunsten vordergründiger Anwendbarkeit vernachlässigen,
- die Sek. I – Standards beachten und vertiefend fortsetzen.

Die Akzeptanz und Umsetzung von Sek. II-/Abitur-Standards unter den Lehrenden in Deutschland setzt nicht nur die Kenntnis der hier genannten Punkte voraus sondern auch genauere Angaben von bildungspolitischen Zielen der Sekundarstufe II in allen deutschen Bundesländern.

Eine Liste von Basiskompetenzen nützt aber den Adressaten nur dann, wenn die geforderten Kompetenzen auch durch exemplifizierende Beispiel-Aufgaben erläutert werden. Analog zu „Basiskompetenzen am Ende der Sek. I“ [Drüke-Noe et al. 2011] schlage ich eine Orientierung an Leitideen (Stoffinhalten) vor. Die Leitideen-Beispiele sollten – neben dem „Stoff“ – gewünschte Kompetenzen exemplifizieren in den Gebieten Analysis/Zahlverständnis, Geometrie/Algebra und Stochastik/Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Eine Diskussion über (un-)verzichtbaren (Basis-)Kompetenzen sollte diese unvollständige Liste berücksichtigen:

- *Mathematische Begriffe und Objekte*
  Kreis- und Kugel-(Gleichungen), (ir)rationale und reelle Zahlen, „unendlich große und unendlich kleine“ Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Konvergenz und Divergenz, ... vgl. [Marx 2013], Gleichungs-Systeme, Wahrscheinlichkeit, statistische Streumaße und Verteilungen ...
- *Mathematische Methoden*
  (logisch) Strukturieren und Fallunterscheidungen durchführen, z. B. beim Argumentieren und Problemlösen,
  Problemlösen mit Analogien, mit Extremfall-Betrachtungen, durch (lineare) Näherungen, Analyse und Synthese von Teilproblemen (Modularisieren), (lineare) Näherungen, Optimieren mit Probier-Intervallschachtelungs-Verfahren und analytischen Methoden, Daten-Erfassung und -Interpretation, Zufallsexperimente durchführen und bewerten ...
- *Mathematische Fertigkeiten ohne und auch mit (elektronischen) Werkzeugen*
  Termumformungen (s. o. Anmerkungen zur Abi-Klausur von 1963), Lösen von Gleichung(s Systemen); Bewerten von Funktionsverhalten; Geometrische Konstruktionen durchführen und Sätze finden und beweisen in der Ebene und im 3D-Raum; Datenmengen erzeugen und auswerten ...

Literatur

[Drüke-Noe e.a. 2011] Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U., Sommer, N., Wynands, A.: Basiskompetenzen „Mathematik für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht“, Cornelsen 2011

[Finale 2012] Finale – Prüfungstraining Zentralabitur NRW 2013, Westermann 2012

[KMK 2012] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)

[Marx 2013] Marx, A.: Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik* 34 (2013), 73–79

[Wynands 1995] Wynands, A.: Abiturklausuren in Mathematik von 1960 bis 1992 – Analyse von Anforderungsprofilen. *Mathematik in der Schule* 33 (1995) 11, 625–633

Hinweise im Internet

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

http://de.statista.com/statistik/daten/studie/183267/umfrage/anteil-der-abiturienten-nach-bundeslaendern/

https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Thematisch/BildungForschungKultur/Bildungsstand/BildungDeutschland5210001129004.pdf?__blob=publicationFile

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

FINALE-Prüfungstraining NRW 2013, http://www.finaleonline.de/tests/171315_12_NRW_MA_Abitur.pdf

Prof. Dr. Alexander Wynands, Mathematisches Institut, Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Email: wynands@math.uni-bonn.de